與「時」俱進

～敘述數學之圖文與計算

洪莉云／郡坑國小

壹、建立教學理念與目標設計

天下雜誌第613期中引述台大電機系教授葉丙成所言，指出未來人才需要「行銷自己想法」的能力，教師要如何讓學生在學習歷程中：勇於說出自己的見解、行銷自己的想法，更甚者，聆聽他人說法、思辨分析問題。在我的教學理念中，是很重要的一環。而自己目前的學生，是一群具敏銳度但怯於表達的孩子，因此，我想透過「勇於說出我想；樂於聆聽回饋」的教學設計，讓學生培養出未來人才應具備的能力。

貳、開展教學活動與理論解析

四、平板融入學科教學需不斷學習

平板融入教學是一種專業技能，它需要融入教學策略及各項的教學行動載具，因此，不論是平板操作技巧、新教學載具的開發等，都是需要採取平板融入教學之教師不斷學習成長。如果能夠在學校組成平板融入教學社群，利用夥伴社群的支持、社群的力量，教師間互相分享，並聘請專家教師給了建議或提供資源，藉由不斷研習及學習，平板融入學科的技能才能成長及純熟。

二、教學中：由具體圖像走向符號紀錄

根據自身數學科教學經驗，學生較容易透過「具體物」理解與吸收，再搭配「作圖」、最後過渡到紀錄「算式」。此與皮亞傑認知發展理論中所提出兒童的認知是由具體運思發展階段到形式運思的階段(John L. Phillips. Jr.，1981/1996)有異曲同工之妙。因此，我的課程模式也嘗試以具體到抽象的認知方式來開展內容。

三、教學後：學生的回顧與檢視

在教學後，我透過讓學生：課後筆記、小組出題、解題與精熟計算四步驟再搭配後測，確認課程的教學成效。根據成效再對課程設計進行微調與修正，重複此循環模式，期望提高自身的教學效能，達到師生共好的目標。

綜合上述，我的數學科教學模式如下圖：

參、實踐教學活動與資料蒐集

一、教學前：進行由個人到全班的三層次概念筆記。

（一）個人概念筆記活動：

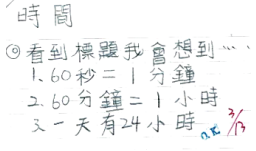
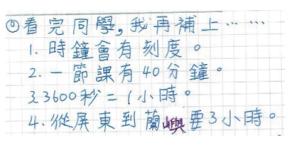
首先，教師請學生使用鉛筆條列寫下自己對於數學課程單元主題「時間」的相關認知。一個概念列一項，逐次條列。

（二）小組交流筆記：

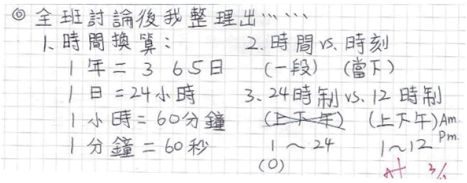
在個人思考紀錄結束後，各組員接著在小組內依序逐條分享自己寫的相關認知。聆聽者邊聽邊逐條檢視內容是否合理？或是提出疑惑、給予回饋。分享期間，若發現同學有寫到而自己沒寫到的重要概念，則使用藍筆補充到第二欄中。

（三）全班統整筆記：

各組組內分享並補充紀錄後，教師透過全班統整進行相關概念的收尾與小結。進行方式是由學生發表相關認知、教師書寫到黑板上家裡條列分類，最後學生再使用黑色原子筆計下全班共同整理出的單元主題課前總筆記。

第一次數學筆記 【學生自己書寫】	第一次數學筆記 【學生自己書寫】
	

第三次數學筆記 【全班討論後黑筆進行統整】



討論時教師巡視行間，傾聽學生交流的當下，順勢紀錄重點學生（例：提出重要概念的學生、經由討論，有具體獲得的學生、有觀念無法理解的學生）。之後，教師帶領全班共同討論，請同學說說小組討論後，自己發現到關於時間的重要概念有哪些？在適切的時刻，請重點學生回答或是複述。此步驟除進行錄影之外，學生的概念筆記，是主要的蒐集對象。

二、教學中

由教學前的概念筆記，發現班上約1/3的學生對於三年級學過的兩種時間表示方式：「12時制」及「24時制」概念不是很穩定，因此，由此處出發，並逐漸引導到此次單元該學會的概念。整個時間單元的教學，共計花費四節課完成。

（一）教師佈題與學生解題：

佈題共分三層次：由單一概念的情境題開始，請學生「透過畫圖找答案」，透過畫圖呈現具體物的方式進行理解，符應學生在具體運思期的學習發展。待學生掌握住時間線段圖的理解與表示方式後，再加上「數學敘述任務」，說明線段圖各部分的意義、找答案的先後步驟。之後進入第二層題目，學生除了前面的兩個任務外，要再加上「列出算式」從圖的敘述進入算式的敘述，透過算式進入以抽象符號解題理解的階段。第三層題目則是複合概念的情境題或是挑戰題，操作時學生的任務是透過對繪圖與列式的數學敘述，說明解題過程。透過佈題與解題的過程形塑單元重要概念，此歷程是透過錄影進行資料蒐集。

（二）倆倆討論與敘述發表：

教師視學生解題任務的完成度，決定發表方式是「自行解題+個人發表」或「自行解題+倆倆討論+代表發表」抑或是「自行解題+小組討論+代表發表」。討論時的程序為：1.先比較紀錄的異同。2.找出紀錄相同或不同處，由雙方輪流說明或解釋。4.聆聽者遇到聽不懂或有疑問的地方務必「發問」，敘述者要立即回應。5.不必形成一定的共識答

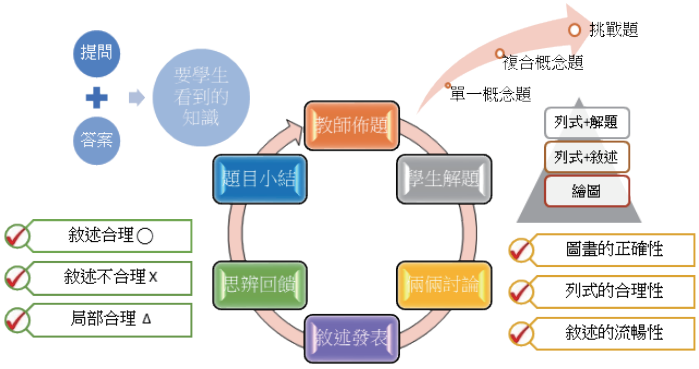
案，但要確認對方敘述的是否為合理答案。此時，教師是觀察者與協助者，走動留意學生之間討論的內容是否有迷思概念？敘述合理？這在之後的敘述發表活動中，提供了教師請哪些組別發表、請哪些組別回應的依據。

倆倆討論	敘述發表（數學敘述）	思辨回饋

（三）思辨回饋與教師結語：

在發表階段中，台上的同學透過敘述，將腦中的思考、邏輯過程外顯化；其他同學透過聆聽，將內容與自身的邏輯、理解做比對。對聆聽者而言，這是一個需要聚精會神思辨的過程，在台上發表結束後，聽眾要依據聽到的內容判斷合不合理？並以手臂做出「○」、「╳」及「☒」的回饋。台上的發表與台下回饋亦可提供教師進行即時性的形成性評量。

綜上所述，整理我的螺旋漸進式【環狀教學流程圖】如下（圖一）：



圖一

三、教學後

教學後我透過以下幾種方式進行延伸評量、強化單元概念及運算精熟化。

（一）學生出題：

教學時知識傳輸的方向是由教師佈題、學生透過列式與數學敘述的方式解題習得概念。教學後，反轉知識傳輸的方向，由教師給算式或是圖示，請學生以小組為單位，依算式或圖示擬出情境題。透過雙向循環，一方面教師可評量學生的學習成效；另一方面學生也可以透過小組共同討論出題及審題，將學到的內容試著與生活情境做連結，符應十二年課綱「解決生活問題」的精神。

（二）交換解題：

學生之間的交換答題在進行時，閃過心中的想法與疑惑可在之後的小組訂正中提出。透過「寫筆記、算題目、說數學、修審題」等活動練習概念並與同組員進行溝通、表達，可提供學生多元化的學習機會。討論後的結果紀錄與小組訂正，也可強化自己在解題過後的後設認知。

小組出題	挑戰別組出的題目	思辨回饋

（三）課後筆記：

在單元教學結束後，學生再次以概念筆記的方式條列所學到的單元概念。「課後筆記」與課前筆記差別在於筆記內容只需呈現「本單元」獲得的概念即可，教師可透過概念筆記確認學生是否具備單元目標所要達成的重要概念？而缺乏的部分則透過提供「概念條」的方式補充給學生。

肆、統整教學實務與分析

此次實施教學的班級是四年級，共13人，男女比例約1:2。因為學生平時被鼓勵能勇於發想、創作與表達，因此在作圖、表達想法上是有經驗、也願意嘗試的。班上平時就習慣分組討論，每組4~5人。統整此次教學蒐集到的實徵資料，就以下幾個面向做出分析。

一、教學前的概念筆記，有助於教師拿捏教學切入點。

學生概念筆記中「看到標題我會想到」與「看完同學我再補上」兩部分是未進入課程前，學生回想舊經驗寫下與「時間」相關的概念，對照應學到與將學到表列如下(表一)：

項目	課前應該具備的大概念	第一次筆記有寫的人數	第二次筆記有寫的人數
1	時間的單位-日時分秒	2	6
2	單位換算-分&秒	6	11
3	單位換算-時&分	10	13
4	單位換算-日&時	5	9
5	單位換算-年&月&日	0	1
6	時間與時刻的區別	0	0
7	12 時制與 24 時制的互換	0	0
8	鐘面的判讀(含電子鐘)	1	2
9	生活中的時間舉例。例：一節課 40 分鐘	1	3
10	同單位時間量的加減計算。例：時或分	0	0
11	一時刻經過一段時間後的時刻計算(未跨日)	0	0

表一

比對此次單元的重要學習目標為「時間的計算」，項目6、7、10、11概念變成非補不可的部分，因此列為本單元課程一開始的教學起點，由此佈題喚醒學生舊經驗，以銜接新進度。並以「全班統整筆記_全班討論後我整理出」的筆記方式留下補救歷程記錄，透過具體的文字紀錄，提示學生曾學過的重要概念。

二、學生對概念的掌握不等同於解題能力，但有助於澄清迷思概念。

在課程進行後，透過請學生整理的「課後概念筆記」填寫情形、對照本單元應習得的概念與透過題目後測結果，整理出下表(表二)：

項目	本單元應習得的概念(教學目標)	筆記有寫概念之座號	後測正確解題之座號
1	能解決時間量的複名數與單名數換算_日&時	1.2.4.6.9.11	1~13
2	能解決時間量的複名數與單名數換算_時&分	2.4.6.9.11	1.3.4.5.7.8.10.13
3	能解決時間量的複名數與單名數換算_分&秒	2.4.6.9~11	1~13
4	能解決時間量複名數與單名數跨階換算_日&分	(無人寫出)	1~5.7.8.12.13
5	能解決跨階單位時間量的比較_時&秒/日&分	1	1.3.5.7~11.13
6	能解決複名數時間量的加減計算_日&時	3~7	1.3.4.5.8.11.13
7	能解決複名數時間量的加減計算_時&分	3.4~8.10.11	1.3~5.7.12.13
8	能解決複名數時間量的加減計算_分&秒	(無人寫出)	3~8.10.13
9	能解決兩時刻之間的時間量問題_時&分/&秒(未跨日)	1.3.4~8.11.12	1~5.11.13
10	能解決時刻與時間量的加減問題_時&分/&秒(未跨日)	1.2.4~8.11.12	1~5.7~13
11	能解決時刻與時間量的加減問題_時&分(跨日)	2.3.5.8.12	1.4.10

表二

比對課後筆記與後測時的結果，發現概念項目第1、3、7、9、10項筆記中有寫出概念且在後測中答對的學生有較明顯的重疊性。而在部分項目中，重疊性很低甚至是沒有的。回溯原因可能是教師上課時強調較多次的題型或概念，會被學生以「文字」或「口語表達」的方式記取，但是否計算正確，則可能與題意理解力(趙曉美，2015)或計算能力有相關。自己進一步採取的作為是對未能正確解題的學生進行補救教學。補救可概分兩方面：(1)解題列式正確，但計算錯誤 以補救學生的計算能力為重點，可將題目中的數字或時間量簡化，在學生有自信能掌握數字或時間量後，再給予較繁複的數據，循序漸進、精熟計算。(2)解題列式錯誤，導致答案錯誤 此時，就需要回到提供學童具體運思的「以繪圖具體化視覺線索」搭建學習鷹架策略，甚至提供更多的解題線索、他人示範等方式，讓學生正確理解題意後，導出合理的解題算式，進而正確解題。可於課後使用教育部補救教學科技化評

量系統上的教學及學習教材，對需要的學生進行補救。

此外，後測完進行補救教學時，普遍會發現課後筆記能寫出概念的學生較未能寫出概念的學生更能容易理解、達成補救。由此項表現可以推論，在課後讓學生再次透過筆記的文字記錄，反思、整理新學到的單元概念，對學生的學習有一定程度的幫助，是可以繼續採取的課後強化方式。

三、教學中的繪圖操作與數學敘述操作有助於學生理解與解題。

班上數學程度較落後的3位同學透過對線段圖的觀察，可列出原本無法正確列出的計算式，顯見繪圖有助於學生解題。數學敘述方面，一開始有4/5的孩子感到困難。在進一步給予「句型」鷹架與釐清數學符號的基本意義後，孩子的數學敘述明顯進步到可用「完整句」呈現。在學生實際表現上，越能清楚的敘述繪圖與算式的學生，解題的成功率越高。於教學的前、後測比較上，班上3位數學程度較弱的學生，後測時測驗成績提升了9%～36%不等。平時表現程度中等的7位學生中有6位後測成績亦提升9%～24%不等，僅有1位成績退步。而數學表現較突出的3位學生，後測成績表現也較前測成績佳。整體而言，數學程度落後群，在進行繪圖操作與數學敘述的教學介入後，成績提升較突出群更有成效。且教學實施後，學生的整體表現是有進步的。

四、倆倆或小組討論可提升同儕學習興趣，但要聚焦很有挑戰性。

班上各小組一聽到討論指令，就會迅速的找搭檔進行，討論相當熱絡。但觀察發現在討論時，雙方數學能力相差很大的組別不是很快就結束、就是時間到了還沒未討論完畢，此時教師的介入就相當重要。例：3-1組程度好的很仔細地跟程度弱的孩子做算式說明，但卻是一直重複關鍵詞想讓對方記住，因此一直無法結束討論。教師發現後引導程度好的孩子提供具體鷹架，用「先說明線段圖再說明算式的方式做敘述」，程度弱的孩子搭配圖說之後，就能用自己的話再敘述一次對方的算式了！

五、發表與思辨回饋活動有助於學生釐清概念。

在發表與回饋活動階段，學生的挑戰來自於由「輸入」轉為「輸出」。綜觀學生「發表」表現趨勢為：單一概念的問題約9%的學生能順利自行敘述，聆聽的學生也能在第一時間正確的判斷是否敘述合理。複合概念的問題，約65%的學生搭配圖文能順利自行敘述，20%學生需教師或同學回應後，依照回應修改回答才能完成敘述。約15%的學生需反覆聆聽3～4位同學的說法後始能完成敘述。「思辨回饋」是和發表同等重要的學習活動，不僅可以提升學生的專注力，還可以訓練學生捕捉語言訊息並立即進行抓重點、辨識、判斷的能力，同時強化自己對知識的後設認知。也是教師進行形成性評量的素材。

六、教學後的課後筆記效果不佳，仍需教師搭鷹架。

課後筆記共實施了兩次填寫，填寫的結果整理如下表(表三)：

項度 / 筆記實施	題幹內容	鷹架	填寫狀況
第一次筆記	看見時間，回想這學期的課程，我會想到	沒給鷹架	1.請學生回想經驗後填寫。 2.學生寫出的皆是課前敘述的內容。 3.全數學生皆無提及新進度的概念。
檢視與調整	1.題幹敘述不夠具體明確。 2.題目難度過高，宜提供鷹架。		
第二次筆記	教師口頭補充：回想這學期新學到的內容，之前已學過的內容不必寫	可開課本	1.請學生翻找數學課本後填寫。 2.在屬於舊概念，但對新進度仍是重要概念而被寫到的：(1)有85%的學生提到「時間」與「時刻」概念的辨別。(2)有69%的學生寫下時間單位的換算或時制的換算概念。(3)有31%的學生提到時間可被計算的概念。 3.僅有15%學生有提到「跨日計算」的新概念。
第二次檢視	1.學生較難於概念深化上切割題型，進行清楚的新概念描述。 2.學生的語文描述能力不足以應付此單元的概念表述。		

經由上表可知新概念的統整要由「題型」轉變成「概念敘述」對中年級的孩子仍具有相當的困難度，需要再給予鷹架(如：情境句型、關鍵詞判斷技巧、逐步拆解與示範、多次練習等)進行活動調整。另一方面，由課後筆記內容呈現可看到學生在課程進行後，基礎概念(見表一)更加穩固，且穩固的部分是可深化為表二概念的項目。

七、教學後的學生出題有助於用不同的角度思考單元概念。

學生出題時的規則只有：從「合理的生活情境」中找找看例子。此項操作是期待學生能發現「學校所學與生活息息相關。」並進行評量。討論時學生相當專注，當然也會有看法歧異或是需要幫助的時候，這時巡視行間的教師就發揮了橋樑與拋問題引導的功能。出好問題後，由各組拿取他組的題目進行解題，討論解題時孩子們表示：題目變簡單了！

伍、省思教學理念與價值建構

學生概念筆記中「看到標題我會想到」與「看完同學我再補上」兩部

一、透過課前筆記找出學生起點作為教學出發點，省時又省力。

透過教學前的概念筆記孩子們寫下記得的部分，已學過但遺忘或迷思之處就是教師要補強的區塊。補強後向上堆疊新知識與新概念才不會因為根基不穩而崩塌。以概念筆記作為教學前測，確實是一項簡易又可行的做法。若有合併實施前測卷，也是兩相對照的好工具。

二、繪圖+算式+數學敘述，學生學到的不只是計算，還有思考。

有別於傳統計算，我的教學從繪圖開始、數學敘述結束。在實務經驗上，當學生無法順利解題時，直接用數字、符號（較抽象）堆砌的算式切入是較困難的，但透過畫圖（較具體）標記題意是較容易被學生理解的。而收尾的數學敘述是由算式紀錄轉成語言描述，等於轉換表現方式強迫孩子再一次的思考、表達。當「繪圖 算式 敘述」的策略能被學生運用自如時，孩子就產生學習遷移運用到其他題型上。

三、討論+發表+思辨回饋，可呈現學生思考歷程、訓練後設認知。

越來越流暢的敘述表達與肢體回饋可呈現學生思考表達與後設認知的成長。幾次討論活動實施下來發現需調整之處為：教師不一定能在第一時間發現學生討論的困難點。因此微調討論規則，再加入1.聆聽者遇到聽不懂或有疑問的地方務必「舉手發問」。2.遇到舉手發問時，敘述者要立即回應。如此一來，教師遊走各組時就可以透過學生手勢來判斷哪組的討論點需要適時提供鷹架。

四、中年級實施課後筆記及學生出題活動，須提供更多鷹架。

課後筆記活動是整個教學流程中，與預期落差最大的一部份，原因探究已於表三中敘明。因應影響因素擬調整教學內容為：改給「題型卡」及「題型描述句卡」以配對活動的方式進行，讓學生貼入課後概念筆記中，降低操作難度。另一方面，學生出題活動對這一班的學生而言，似乎是有趣的，由事後的學生回饋，13位中有11位表示喜歡此活動，原因諸如：要動腦、很刺激、出陷阱題有趣、知道（出題）要合理、還有一位數學能力較弱的學生表示「覺得變簡單」。是值得再實施的課後小活動。

後記：看見學生越來越願意開口說出想法、提出問題、給予回饋。省思自己的教學，是不是越來越接近「讓學生培養出未來人才應具備能力」了呢？

參考文獻：

1.天下網路雜誌613期，余佩樺(2016)，葉丙成：未來人才必備的六大能力。2018年4月20日查自https://www.cw.com.tw/article/article.action?id=5080094

2.國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域 (2003)。2018年4月20日查自http://www.k12ea.gov.tw/97_sid17/970911數學課程綱要修訂%28單冊%29.pdf

3.費利浦 / John L. Phillips. Jr.（1996）。皮亞傑式兒童心理學與應用（王文科，譯）。台北：心理。（原著出版於1981年）。

4.臺灣教育評論月刊，4（4），趙曉美(2015)，補救教學vs.有效教學，頁21-25。